

**EPFL****X**

Enseignant: Mathieu Huruguen

Algèbre linéaire - CMS

21 avril 2023

Durée : 105 minutes

# Contrôle 3 (énoncé)

SCIPER: XXXXXX

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera:
  - les points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
<input checked="" type="checkbox"/>		



## Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

### Enoncé

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on donne la base  $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$  avec :

$$v_1 = (1, 0, -2), \quad v_2 = (0, 0, 5), \quad v_3 = (3, 1, 1)$$

ainsi que l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \rightarrow (2x - 7y + 11z, x - y + 7z, -5y - 3z).$$

**Question 1 (2 points)** Quel est le coefficient de  $v_1$  dans la décomposition de  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  sur la base  $\mathcal{B}$  ?

$x + 3z$

$x + 3y$

$x$

$x - 3y$

**Question 2 (2 points)** Quel est le coefficient sur la troisième ligne et la première colonne de  $[f]_{\mathcal{B}}$  ?

-13

-17

6

0

**Question 3 (2 points)** Que peut-on-dire de l'ensemble  $f^{-1}(\{v_3\})$  ?

il ne contient qu'un seul élément

il est vide

il se représente par une droite dans l'espace

il se représente par un plan dans l'espace

**Enoncé**

Notons  $\mathcal{B}_{\text{can}} = e_1, e_2, e_3$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On donne deux applications linéaires :

$$f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

de matrices respectives :

$$A = [f]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \quad \text{et} \quad B = [g]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$$

en base canonique. On suppose qu'en faisant subir à  $A$  les opérations suivantes :

$$C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1, \quad L_2 \leftarrow 2L_2, \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2, \quad L_1 \leftrightarrow L_3,$$

on obtient la matrice  $B$ .

**Question 4 (1 point)** Si  $\det f = 12$ , combien vaut  $\det g$  ?

-24

6

24

-6

**Question 5 (2 points)** Sélectionner les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  ci-dessous qui vérifient que:

$$B = [f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}.$$

$\begin{cases} \mathcal{B} = e_1, 2e_1 + e_2, -2e_1 - e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3, 2e_2, e_1 \end{cases}$

$\begin{cases} \mathcal{B} = e_1, 2e_1 + e_2, -e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3, 2e_2, e_1 \end{cases}$

$\begin{cases} \mathcal{B} = e_1, 2e_1 + e_2, -2e_1 - e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3, \frac{1}{2}e_2, e_1 \end{cases}$

$\begin{cases} \mathcal{B} = e_1, 2e_1 + e_2, -e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3, \frac{1}{2}e_2, e_1 \end{cases}$

**Question 6 (1 point)** On sait que :

$$\text{Ker } g : x = \frac{y}{2} = z.$$

Parmi les triplets suivants, un seul appartient à  $\text{Ker } f$ . Lequel ?

(1, 2, 1)

(5, 1, 1)

(1, 1, 1)

(3, 1, 1)



## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Sauf mention explicite du contraire, votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 7:** *Cette question est notée sur 7 points.*

.5    .5    .5    .5    .5    .5  
 0    1    2    3    4    5    6    7

Dans  $M_3(\mathbb{R})$  on donne, en fonction du paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -\alpha \\ 1 & 7+\alpha & 4 \end{pmatrix}.$$

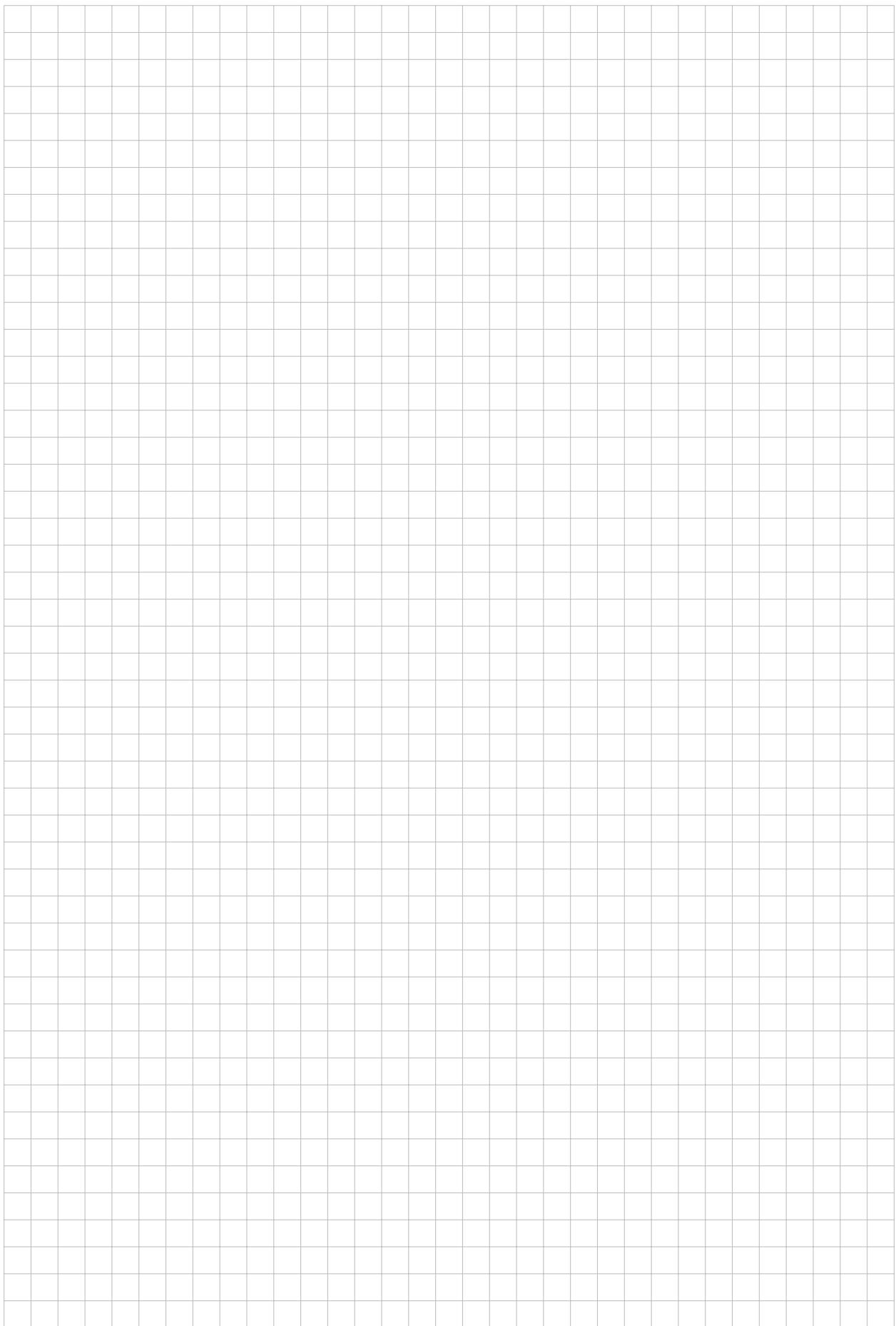
- (a) Dans le cas où  $\alpha = -1$ , montrer que  $A$  est inversible et calculer sa matrice inverse.

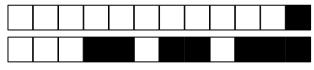
(b) Prenons  $\alpha = 2$ . En détaillant votre réponse, trouver une décomposition colonne-ligne minimale de  $A$ .

(c) Déterminer le rang de  $A$  en fonction de la valeur de  $\alpha$ .

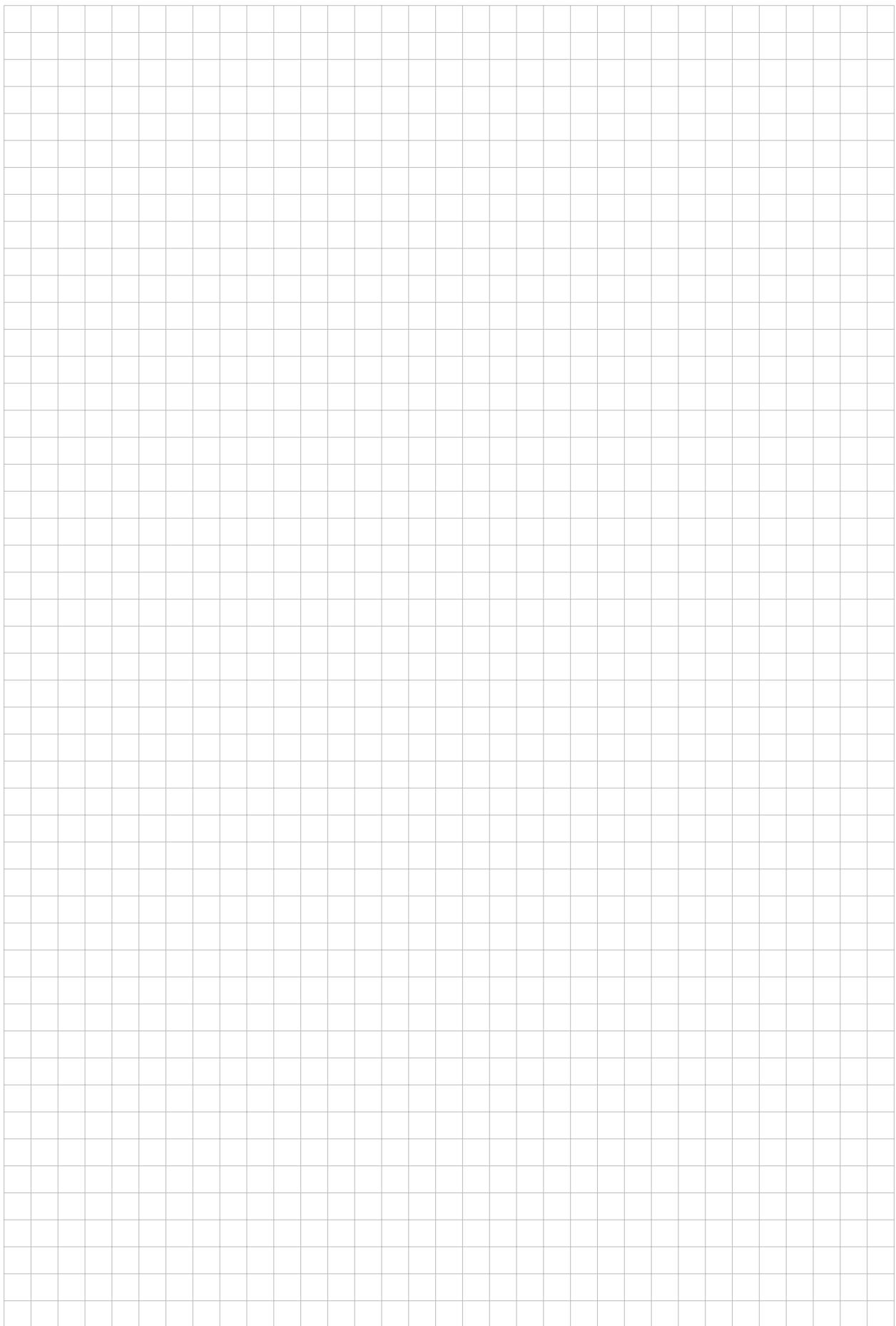


+1/5/56+



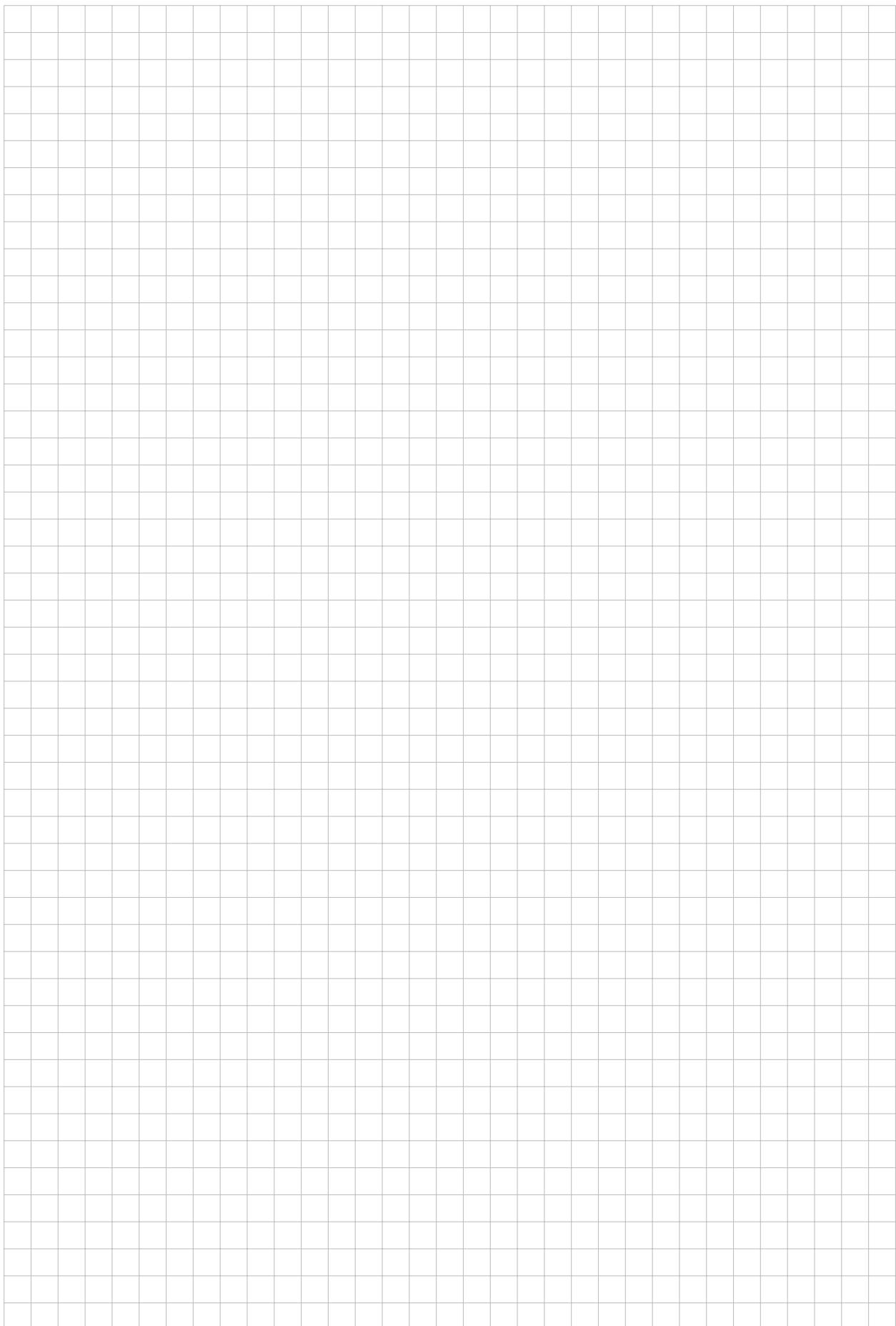


+1/6/55+





+1/7/54+





**Question 8:** *Cette question est notée sur 8 points.*

.5    .5    .5    .5    .5    .5    .5  
 0    1    2    3    4    5    6    7    8

On donne l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x - y + 2z, -7x + 4y - 11z, -3x + 2y - 5z).$$

- (a) Montrer que  $f$  est de rang 2.
  - (b) Déterminer une base de  $\text{Ker } f$  et une équation de  $\text{Im } f$ .
  - (c) En justifiant votre réponse, donner des bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $\mathbb{R}^3$  telles que :

$$[f]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conseil de rédaction : commencez par écrire vos choix de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ , puis faites les vérifications nécessaires.

- (d) Même question qu'au (c) mais avec la **condition supplémentaire** que la première ligne de la matrice:

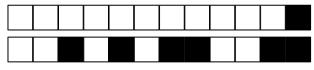
$$[f]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$$

est nulle. Pour cette question, aucune justification n'est demandée.

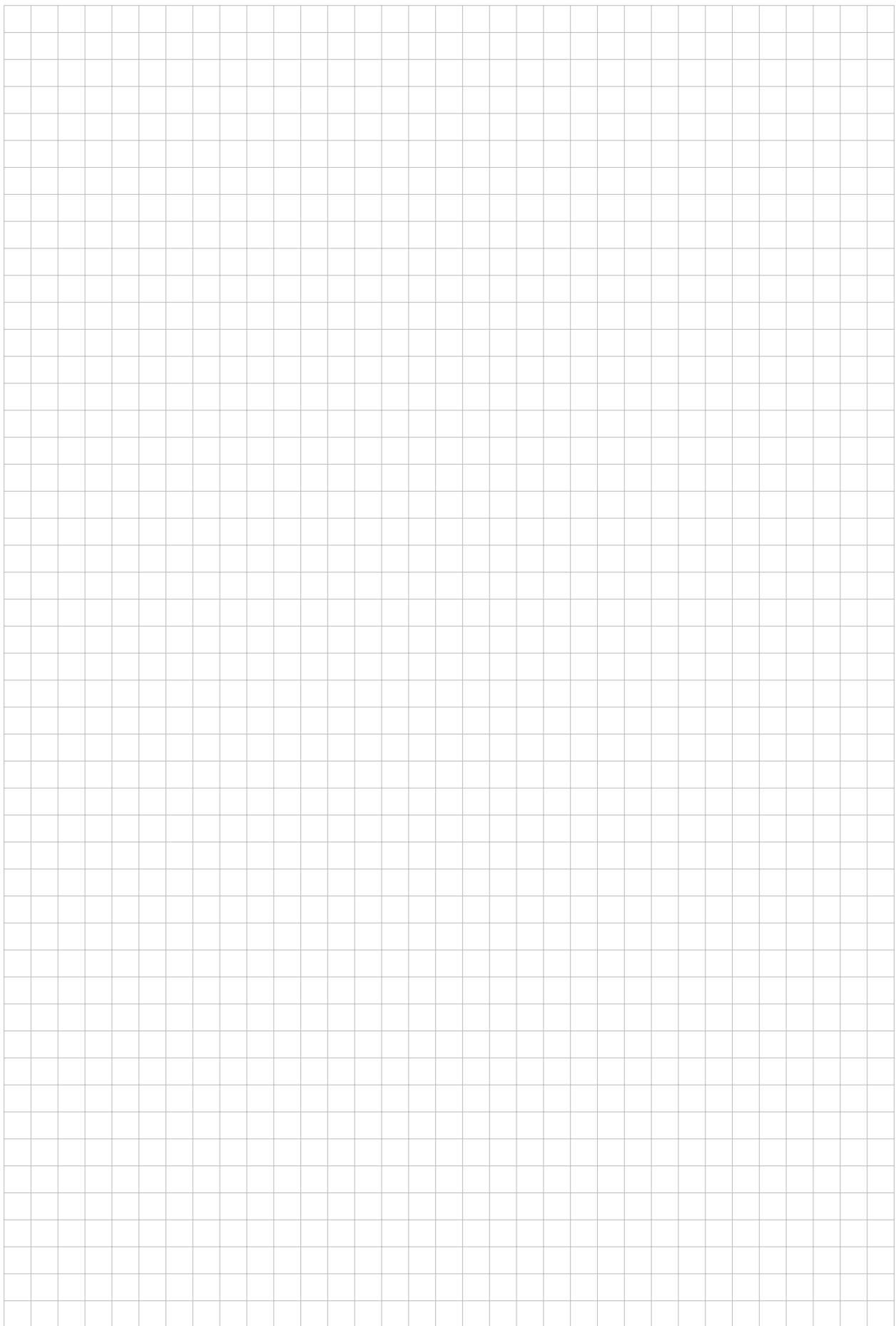


+1/9/52+



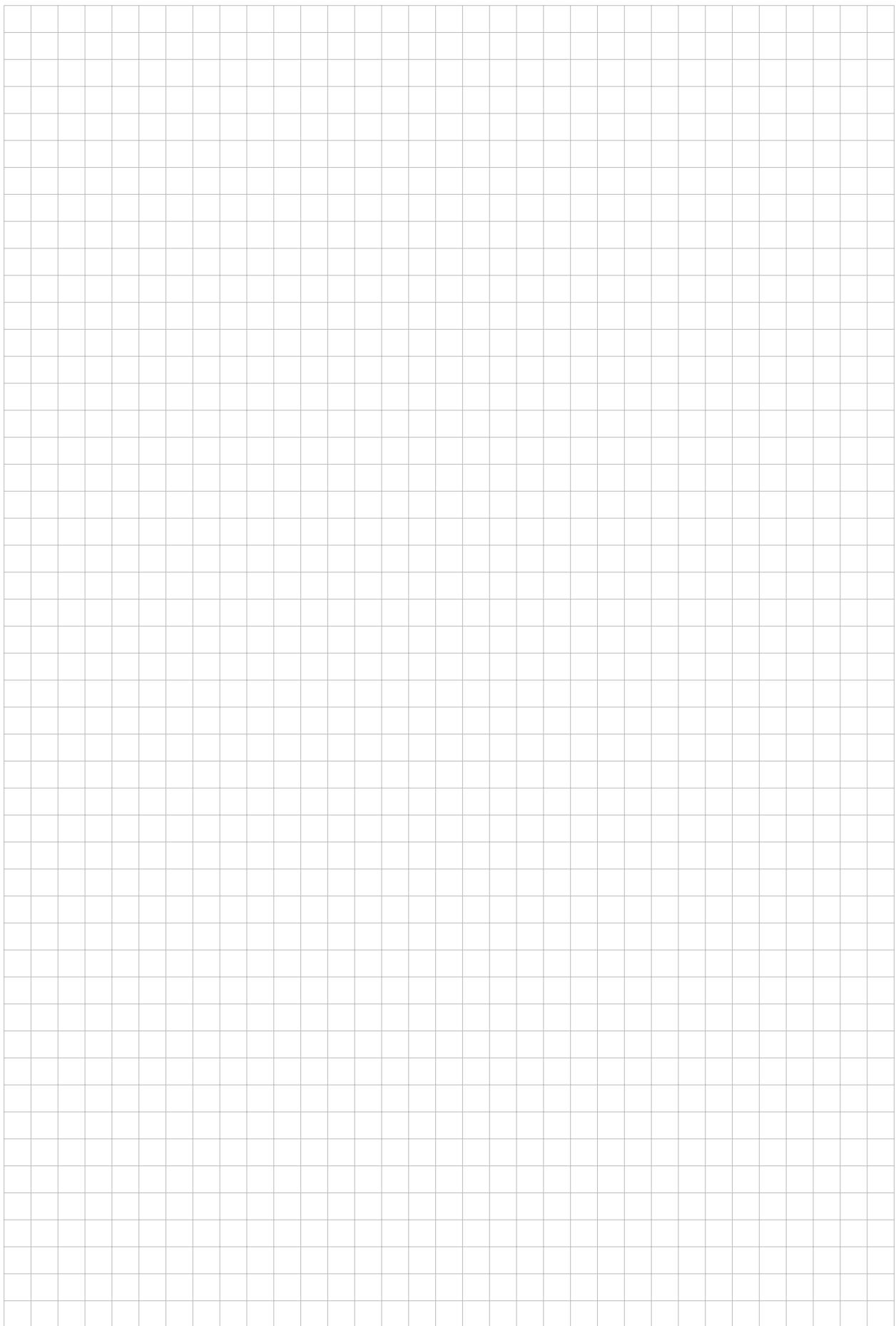


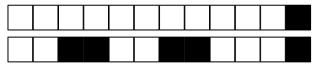
+1/10/51+





+1/11/50+





+1/12/49+

